



اصول کنترل غیر خطی

پاسخ تمرین سری دوم

مدرس: حیرانی نویری

پاسخ تمرین شماره ۳ سری اول:

ملاحظه شد که با صرف نظر کردن بعضی از متغیرها و پارامترهای سیستم، یک سیستم غیر خطی به یک سیستم خطی تبدیل شد اکنون این سیستم خطی را به فرم فضای حالت نمایش می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که این سامانه دارای دو قطب که یکی پایدار و دیگری ناپایدار است، برای رسم صفحه حالت در ابتدا بردارهای ویژه این سامانه را بدست می‌آوریم.

$$|\lambda I - A| = 0$$

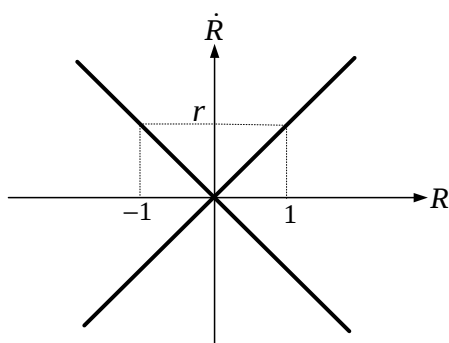
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -r^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - r^2 = 0$$

$$s = \pm r$$

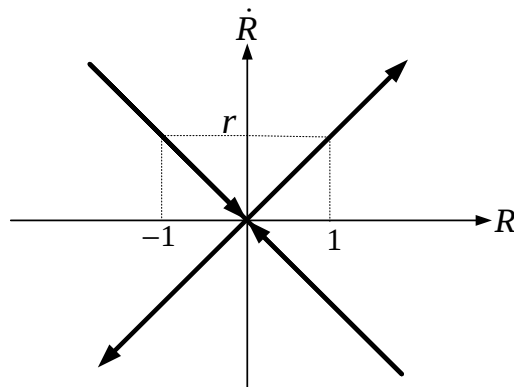
$$(rI - A)v_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} r & -1 \\ -r^2 & r \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}$$

$$(-rI - A)v_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} -r & -1 \\ -r^2 & -r \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ r \end{bmatrix}$$

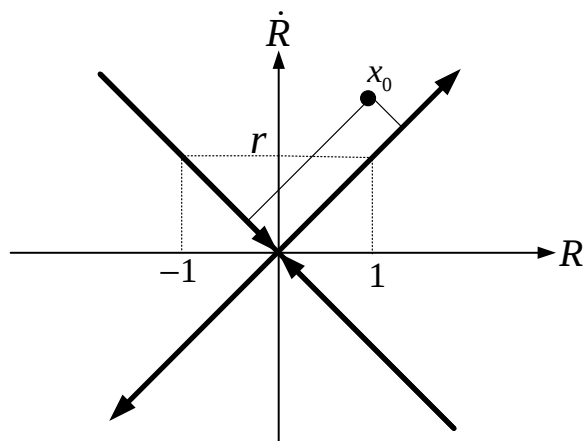
می‌دانیم اگر شرایط اولیه را در راستای بردارهای ویژه انتخاب کنیم آنگاه همواره مسیر حالت در آن راستا باقی خواهد ماند بنابراین در ابتدا این بردارهای ویژه را ترسیم می‌کنیم.



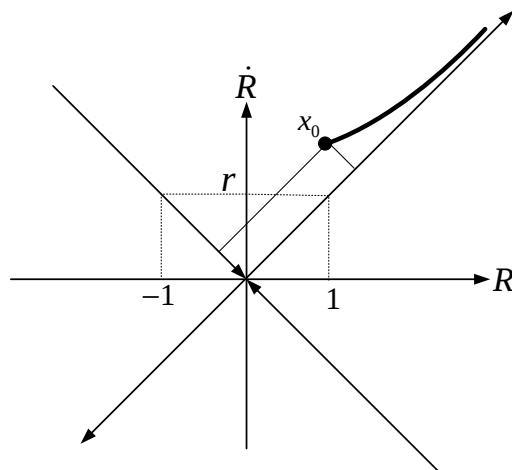
می‌دانیم یکی از این بردارهای ویژه مربوط به مود پایدار سیستم و دیگری مربوط به مود ناپایدار سیستم است بنابراین با انتخاب جهت برای بردارهای ویژه این موضوع را نشان می‌دهیم.



اکنون به عنوان نمونه شرایط اولیه را در ناحیه اول انتخاب می‌کنیم.

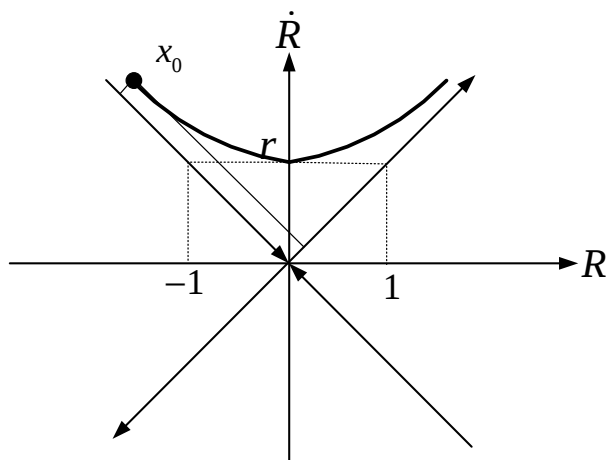


ملاحظه می‌شود که اگر بردار شرط اولیه را بر بردارهای ویژه تصویر کنیم آنگاه سهم بردار ویژه مربوط به مود ناپایدار بیشتر است بنابراین مسیر حالت به گونه‌ای است که در ادامه سهم بردار ویژه ناپایدار بیشتر شده و سهم بردار ویژه پایدار کاهش می‌یابد.

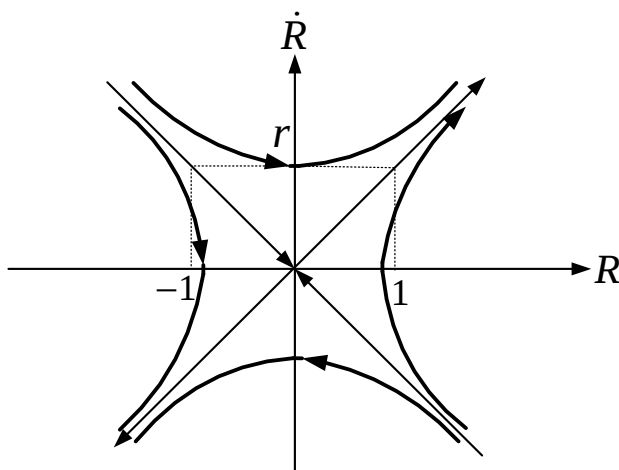


حال اگر شرایط اولیه را در ناحیه دوم انتخاب کنیم، در ابتدا وزن بردار ویژه ناپایدار کمتر از وزن بردار ویژه پایدار است و در این صورت مسیر حالت در حال حرکت به سمت نقطه تعادل است اما باید توجه داشت که با حرکت مسیر حالت به سمت نقطه تعادل وزن بردار ویژه مود ناپایدار افزایش و وزن بردار ویژه مود پایدار کاهش می‌یابد و این تا زمانی اتفاق می‌افتد که مسیر حالت

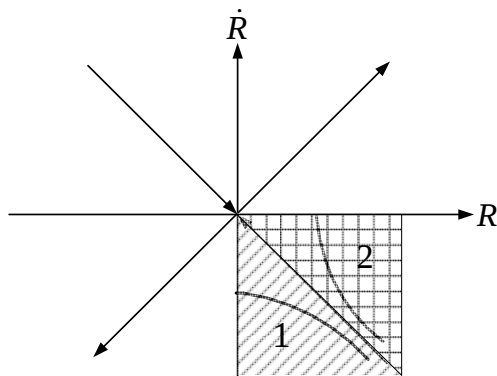
وارد ناحیه اول شود در این حالت وزن بردار ویژه ناپایدار بیشتر از وزن بردار ویژه پایدار خواهد شد و مسیر حالت در راستای بردار ویژه مود ناپایدار حرکت می‌کند.



به همین ترتیب می‌توان برای نواحی دیگر نیز این کار را انجام داد.



حال سوال این است که اگر از ناحیه چهارم شروع کنیم آیا به هدف برخورد خواهیم کرد؟ در آغاز باید این موضوع را مورد بررسی قرار دهیم که در چه صورتی موشک به هدف برخورد می‌کند؟ باید توجه داشت که هنگامی که فاصله موشک تا هدف به صفر برسد آنگاه می‌توان گفت که موشک به هدف اصابت کرده است. مسیر حالت با شروع از ناحیه چهارم به صورت زیر می‌شود.



ملاحظه می شود که اگر شرایط اولیه را در ناحیه شماره ۱ انتخاب کنیم مسیر حالت به سمتی می رود تا برخورد صورت گیرد $R = 0$ ، و اگر در ناحیه شماره ۲ انتخاب کنیم آنگاه برخورد صورت نخواهد گرفت در واقع می توان با در نظر گرفتن شرط زیر برخورد را حتمی دانست.

$$\frac{\dot{R}}{R} < -r$$

واضح است که هرچه r را بتوان کوچکتر در نظر گرفت آنگاه ناحیه وسیع تری وجود خواهد داشت که اگر شرایط اولیه در آن ناحیه انتخاب شود برخورد صورت گیرد.

پاسخ تمرین شماره ۱:

(الف) در ابتدا برای بررسی پایداری این سیستم از قضیه ای که آموختیم استفاده می کنیم. این قضیه بیان می داشت که: یک سیستم مرتبه اول در نقطه تعادل $x = 0$ پایدار است اگر و فقط اگر در همسایگی مرکز، شرط $xf(x) \leq 0$ برقرار باشد.

برای سیستم داده شده شرط بالا را مورد بررسی قرار می دهیم:

$$f(x) = -x^3$$

$$xf(x) = -x^4 \leq 0$$

ملاحظه شد که شرط بالا برقرار است و چون در صورت قضیه (اگر و فقط اگر) آمده است این سیستم پایدار است.

(ب) برای بررسی پایداری مجانبی در ابتدا به تعریف رجوع می کنیم:

می گوییم یک سیستم هنگامی پایدار مجانبی است که هم پایدار و هم جاذب باشد. بررسی پایداری در قسمت قبل انجام گرفت اکنون تنها کافی است شرط جاذب بودن را مورد بررسی قرار دهیم.
شرط جاذب بودن را بازنویسی می کنیم.

$$\|x_0\| < \eta(t_0) \rightarrow s(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

با توجه به تعریف ذکر شده ابتدا باید حل سیستم بالا را به ازاء شرط اولیه $x(0) = x_0$ بدست آوریم.

$$\dot{x} = -x^3$$

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$

$$\frac{dx}{x^3} = -dt$$

$$-\frac{1}{2x^2} + c = -t$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{(2t+d)}}, d = \frac{1}{x_0^2}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2tx_0^2 + 1}}$$

اکنون کافی است تا شرط لازم برای برقراری پایداری مجانبی را چک کنیم.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t, 0, x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_0}{\sqrt{2tx_0^2 + 1}} = 0$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت این سیستم پایدار مجانبی می باشد.

(ج) در این قسمت می خواهیم این سیستم را از دیدگاه پایداری نمایشی مورد بررسی قرار دهیم.

تعریف پایداری نمایشی را می نویسیم:

نقطه تعادل صفر هنگامی پایدار نمایشی است که ثابت های $r, a, b > 0$ وجود داشته باشد که در آن

$$\|s(t_0 + t, t_0, x_0)\| \leq a\|x_0\|e^{-bt}, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in B_r$$

اکنون با جاگذاری حل بالا در تعریف، این موضوع را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم این سیستم پایدار نمایی نیست.

$$\left\| \frac{x_0}{\sqrt{2tx_0^2 + 1}} \right\| \leq a \|x_0\| e^{-bt}, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in B_r$$

$$\frac{1}{\sqrt{2tx_0^2 + 1}} \leq a e^{-bt}, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in B_r$$

$$\frac{e^{bt}}{\sqrt{2tx_0^2 + 1}} \leq a, \quad \forall t, t_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in B_r$$

اکنون اگر t به سمت بی‌نهایت میل کند سمت چپ نامساوی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین $a \leq \infty$ باید باشد که این موضوع با فرض در تناقض است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت این سیستم پایدار نمایی نمی‌باشد.

پاسخ تمرین شماره ۴:

با جاگذاری پارامترها با عدد ۱، معادلات به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1)$$

می‌خواهیم با روش خطی سازی حول نقطه تعادل به بررسی پایداری این سیستم در حول و حوش نقطه تعادل بپردازیم در ابتدا نقاط تعادل سیستم را بدست می‌آوریم.

$$x_1(1 - x_2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$-x_2(1 - x_1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده در خواهیم یافت که این سیستم می‌تواند دارای نقاط تعادل زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سیستم را در حول و حوش نقاط تعادل بدست آمده خطی سازی می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} & \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \\ \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} & \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که یکی از مقادیر ویژه سیستم پایدار و دیگری ناپایدار است در اصلاح به این حالت، حالت زینی اطلاق می‌شود. با استفاده از آموخته‌هایمان می‌دانیم که اگر در خطی سازی به این حالت برخورد کردیم، سیستم غیرخطی نیز دارای چنین حالتی است. بنابراین سیستم غیرخطی در حول و حوش این نقطه‌ی تعادل ناپایدار است. اکنون برای نقطه تعادل دیگر خطی سازی می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} & \left. \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} \\ \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=1} & \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

در این حالت مقادیر ویژه سیستم از نوع موهومی محض است می دانیم که اگر در خطی سازی به چینی حالتی برخورد کردیم نمی توانیم درباره رفتار سیستم غیرخطی در حول و حوش تعادل اظهار نظری بکنیم و باید از روش های دیگری برای بررسی پایداری این سیستم حول و حوش تعادل استفاده کنیم.

پاسخ تمرین شماره ۷:

$$1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

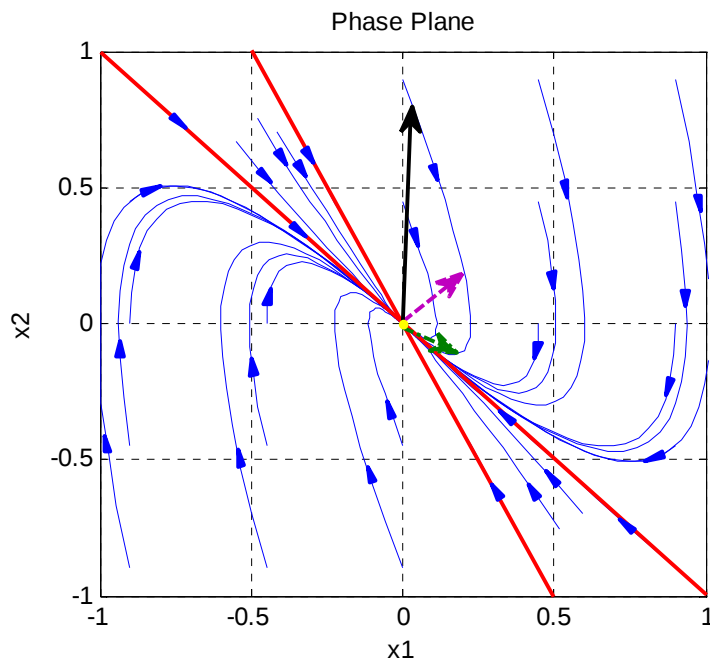
$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$$

هر دو مقدار ویژه سمت چپ محور موهومی هستند در نتیجه نقطه ی تعادل پایدار است. می دانیم که اگر شرایط اولیه را در راستای بردارهای ویژه انتخاب کنیم، مسیر حالت در همان راستا باقی خواهد ماند بنابراین در ابتدا این بردارهای ویژه را رسم می کنیم (این بردارها در شکل با رنگ قرمز مشخص شده اند). فرض کنید از یک نقطه ی دلخواه از صفحه ی فاز حرکت را آغاز کنیم، چون نقطه ی تعادل پایدار است مسیر حالت به گونه ای است که جهت آن به سمت نقطه ی تعادل است. برای رسم مسیر حالت نیاز است که بردار واصل نقطه ی تعادل به نقطه ی حالتی که در آن واقع هستیم را در نظر بگیریم (این بردار در شکل با رنگ مشکی نشان داده شده است). بسته به میزان تصویر بردار مورد نظر بر روی بردارهای ویژه و مقدار عددی مقدار ویژه ی متناظر هر بردار ویژه می توان شمایی از مسیر حالت را رسم کرد بدین ترتیب که هر چه میزان تصویر بردار مورد نظر بر روی یک بردار ویژه بیشتر بوده و مقدار ویژه ی متناظر آن بردار ویژه از مبدا دورتر باشد مسیر حالت در راستای بردار ویژه ی مورد نظر خواهد بود چرا که اگر بردار واصل نقطه ی تعادل به نقطه ی حالت را v بنامیم مسیر حالت مطابق زیر خواهد بود:

$$v(t) = a_1(t)v_1 + a_2(t)v_2$$

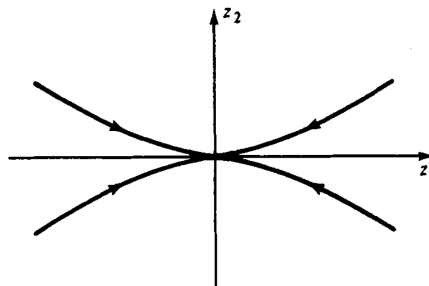
$$x(t) = a_1(t)v_1 e^{\lambda_1 t} + a_2(t)v_2 e^{\lambda_2 t}$$

برای این که حرکت در راستای بردار ویژه ی اول غالب باشد باید مقدار a_1 بزرگتر بوده و مقدار λ_1 از مبدا دورتر باشد. در مورد همین نقطه ی دلخواهی که در نظر گرفتیم ابتدا مقدار a_2 بزرگتر از a_1 است لذا حرکت غالب مسیر حالت در راستای بردار ویژه ی دوم است تا جایی که در مسیر حالت به حالتی می رسیم که بردار واصل آن با رنگ بنفش نشان داده شده است که در آن حول و حوش مقادیر a_1 و a_2 نزدیک به هم بوده و حرکت در راستای مجموع دو بردار ویژه انجام می شود تا جایی که در مسیر حالت به حالتی می رسیم که بردار واصل آن به با رنگ سبز نشان داده شده است که در آن حول و حوش مقدار a_1 از a_2 بزرگتر است و حرکت غالب در راستای بردار ویژه ی اول است.



State Equations			
$f1(x1, x2) =$	x2	Resolution	Medium Draw
$f2(x1, x2) =$	-2*x1-3*x2	Zoom	- + Draw

البته راه دیگری نیز وجود دارد و آن این که ابتدا تبدیل T را طوری یافته که ماتریس به شکل استاندارد $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ تبدیل شود. آنگاه مسیر حالت متغیرهای جدید z_1 و z_2 را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. سپس از تبدیل معکوس T استفاده کرده و مسیر حالت را رسم می‌کنیم.



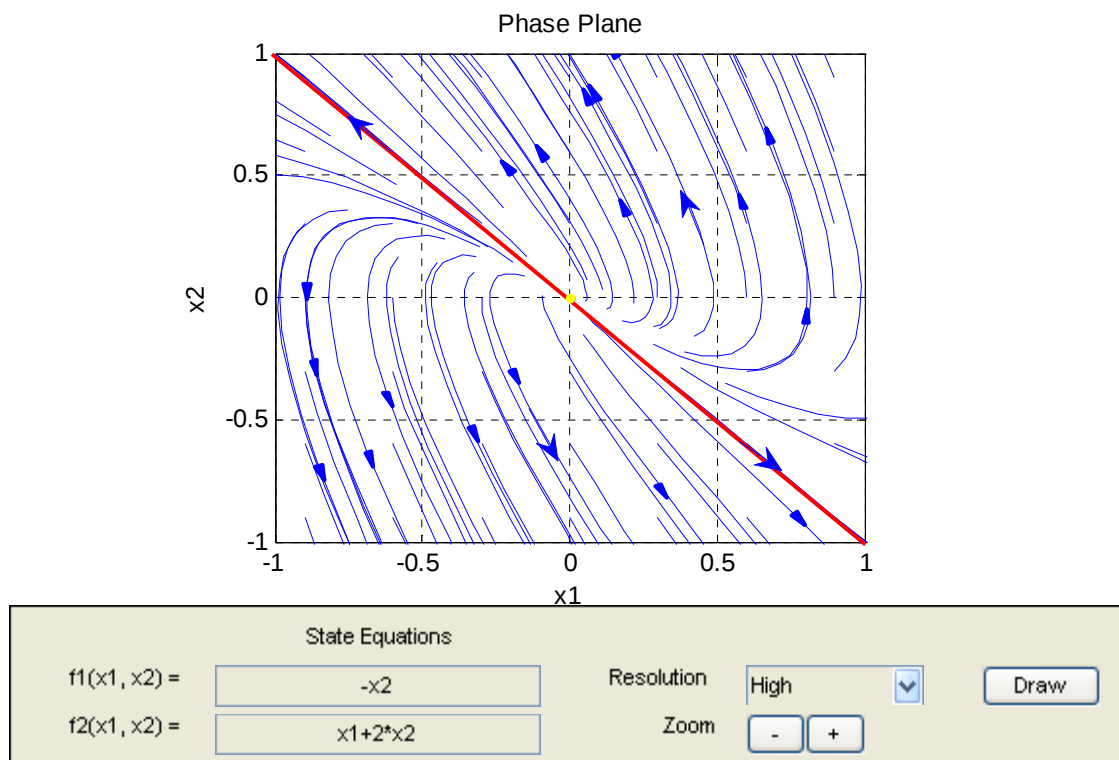
$$2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\lambda - 2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

$$v1 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, v2 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

هر دو مقدار ویژه سمت راست محور موهومی هستند در نتیجه نقطه‌ی تعادل ناپایدار است. می‌دانیم که اگر شرایط اولیه را در راستای بردارهای ویژه انتخاب کنیم، مسیر حالت در همان راستا باقی خواهد ماند بنابراین در ابتدا این بردارهای ویژه که در این حالت هر دو بر هم منطبقند را رسم می‌کنیم (این راستا در شکل با رنگ قرمز مشخص شده است). فرض کنید از یک نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی فاز حرکت را آغاز کنیم، چون نقطه‌ی تعادل ناپایدار است مسیر حالت به گونه‌ای است که جهت آن از سمت نقطه‌ی تعادل به سمت بیرون است. برای رسم مسیر حالت نیاز است که بردار واصل نقطه‌ی تعادل به نقطه‌ی حالتی که در آن

واقع هستیم را در نظر بگیریم. این مسئله حالت خاصی از مسئله‌ی قسمت قبل است با این تفاوت که بردارهای ویژه آن بر هم منطبقند و لذا می‌توان مسیر حالت آن را مطابق زیر رسم کرد.

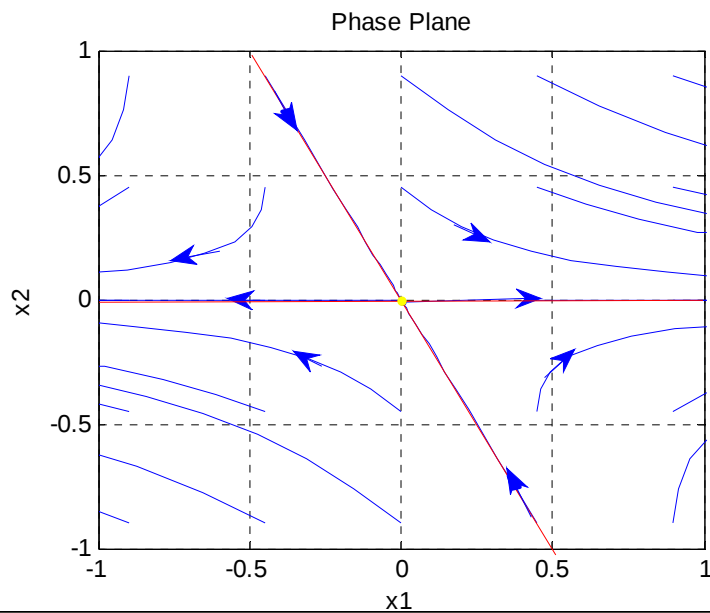


$$3) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

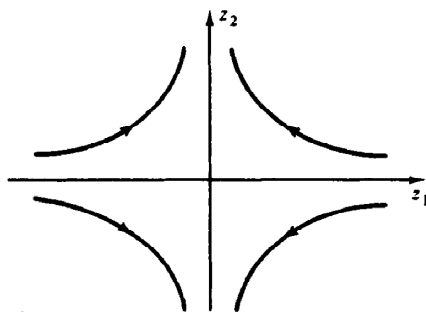
$$v1 = \begin{bmatrix} -0.4472 \\ 0.8944 \end{bmatrix}, v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یکی از مقادیر ویژه سمت چپ محور موهومی و مقدار ویژه‌ی دیگر سمت راست محور موهومی است، در نتیجه نقطه‌ی تعادل، زینی (Saddle Point) است. می‌دانیم که اگر شرایط اولیه را در راستای بردارهای ویژه انتخاب کنیم، مسیر حالت در همان راستا باقی خواهد ماند بنابراین در ابتدا این بردارهای ویژه را رسم می‌کنیم (این بردارها در شکل با رنگ قرمز مشخص شده‌اند). فرض کنید از یک نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی فاز حرکت را آغاز کنیم، مسیر حالت به گونه‌ای است که متغیر x_1 آن به سمت بی‌نهایت و متغیر x_2 آن به سمت صفر میل می‌کند. برای رسم مسیر حالت نیاز است که بردار واصل نقطه‌ی تعادل به نقطه‌ی حالتی که در آن واقع هستیم را در نظر بگیریم. بسته به میزان تصویر بردار مورد نظر بر روی بردارهای ویژه و مقدار عددی مقدار ویژه‌ی متناظر هر بردار ویژه می‌توان شمایی از مسیر حالت را رسم کرد این روند را مطابق قسمت اول انجام می‌دهیم، مسیر حالت آن مطابق زیر رسم می‌شود.



State Equations		Resolution	Zoom	Draw
$f_1(x_1, x_2) =$	x1+x2	Medium	- +	
$f_2(x_1, x_2) =$	-x2			

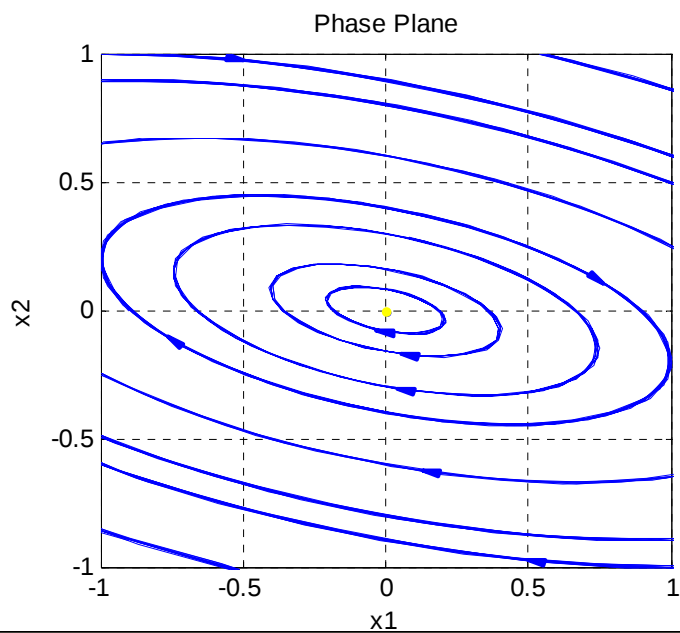
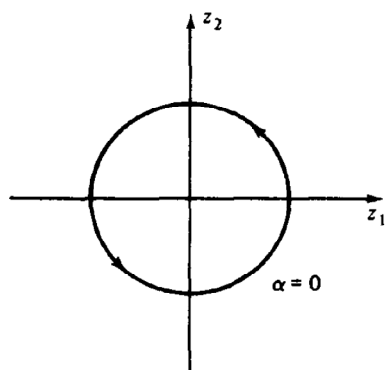
البته راه دیگری نیز وجود دارد و آن این که ابتدا تبدیل T را طوری یافته که ماتریس به شکل استاندارد $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ تبدیل شود. آنگاه مسیر حالت متغیرهای جدید z_1 و z_2 را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. آنگاه از تبدیل معکوس T استفاده کرده و مسیر حالت را رسم می‌کنیم.



$$4) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 5 = \lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

هر دو مقدار ویژه روی محور موهومی هستند، در نتیجه نقطه‌ی تعادل، مرکز (Center Point) است. می‌دانیم که در این حالت مسیرهای حالت بیضی‌گون هستند. برای یافتن بیضی‌گون‌ها ابتدا تبدیل T را طوری یافته که ماتریس به شکل استاندارد $\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ تبدیل شود. آنگاه مسیر حالت متغیرهای جدید z_1 و z_2 را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. آنگاه از تبدیل معکوس T استفاده کرده و مسیر حالت را مطابق زیر رسم می‌کنیم. برای یافتن جهت چرخش بیضی‌گون‌ها نیز کافیست از توابع f_1 و f_2 در یک نقطه‌ی دلخواه استفاده کنیم.

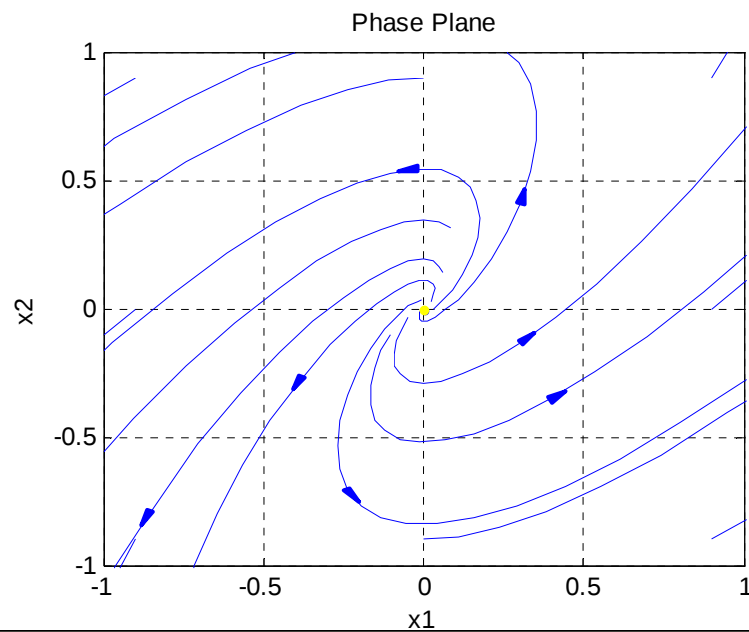
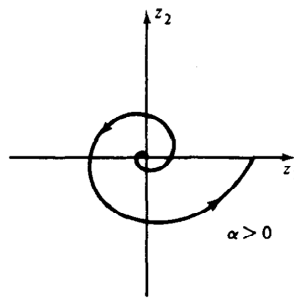


State Equations		Resolution	Zoom	Draw
f1(x1, x2) =	x1+5*x2	Low	- +	Draw
f2(x1, x2) =	-x1-x2			

5) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda(\lambda - 2) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

هر دو مقدار ویژه سمت راست محور موهومی هستند، در نتیجه نقطه‌ی تعادل، ناپایدار است. می‌دانیم که در این حالت مسیرهای حالت به صورت مارپیچ از نقطه‌ی تعادل دور می‌شوند. ابتدا تبدیل T را طوری یافته که ماتریس به شکل استاندارد تبدیل شود. آنگاه مسیر حالت متغیرهای جدید z_1 و z_2 را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. آنگاه از تبدیل معکوس T استفاده کرده و مسیر حالت را رسم می‌کنیم.

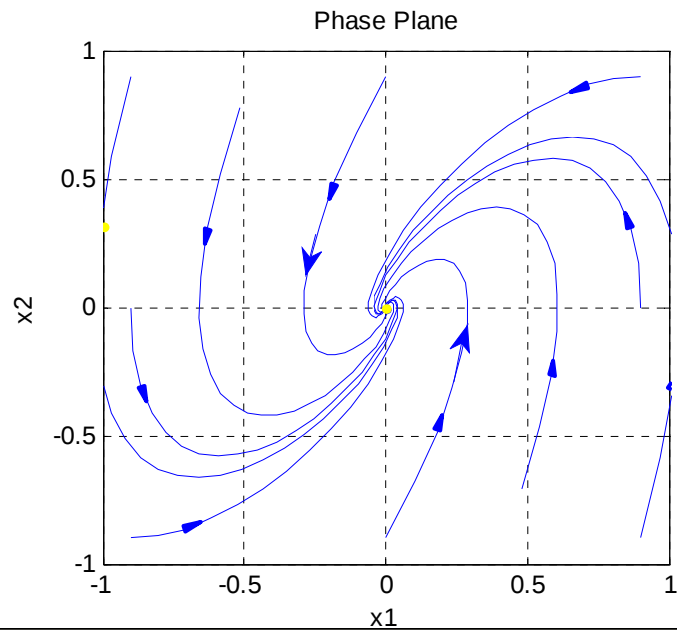
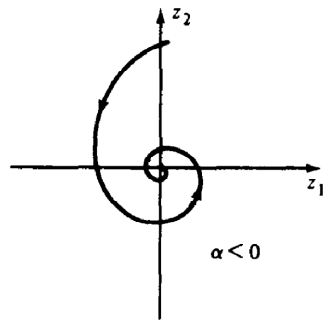


State Equations			
f1(x1, x2) =	2*x1-x2	Resolution	Low v
f2(x1, x2) =	2*x1	Zoom	- + Draw

6) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\lambda(\lambda + 2) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$$

هر دو مقدار ویژه سمت چپ محور موهومی هستند، در نتیجه نقطه‌ی تعادل، پایدار است. می‌دانیم که در این حالت مسیرهای حالت به صورت مارپیچ از نقطه‌ی تعادل دور می‌شوند. ابتدا تبدیل T را طوری یافته که ماتریس به شکل استاندارد $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ تبدیل شود. آنگاه مسیر حالت متغیرهای جدید z_1 و z_2 را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. آنگاه از تبدیل معکوس T استفاده کرده و مسیر حالت را رسم می‌کنیم.

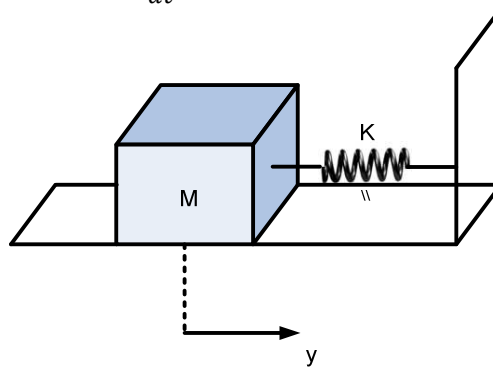


State Equations			
$f1(x1, x2) =$	-x2	Resolution	Low Draw
$f2(x1, x2) =$	2*x1-2*x2	Zoom	- +

پاسخ تمرین شماره ۹:

در این تمرین سعی داریم تا اثر اصطکاک ایستایی را در یک سیستم جرم و فنر مورد بررسی قرار دهیم برای این کار در ابتدا سیستم مورد نظر را مدلسازی می‌کنیم. برای این کار از ادبیات مکانیک نیوتنی استفاده می‌کنیم.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky + F_c(y) = 0$$



معادله بدست آمده در بالا، مرتبه‌ی دوم می باشد برای اینکه بتوان آنها را به فرم معادلات حالت درآورد باید متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & ; x_1 &= y \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{F_c(x_2)}{m} & ; x_2 &= \dot{y} \end{aligned}$$

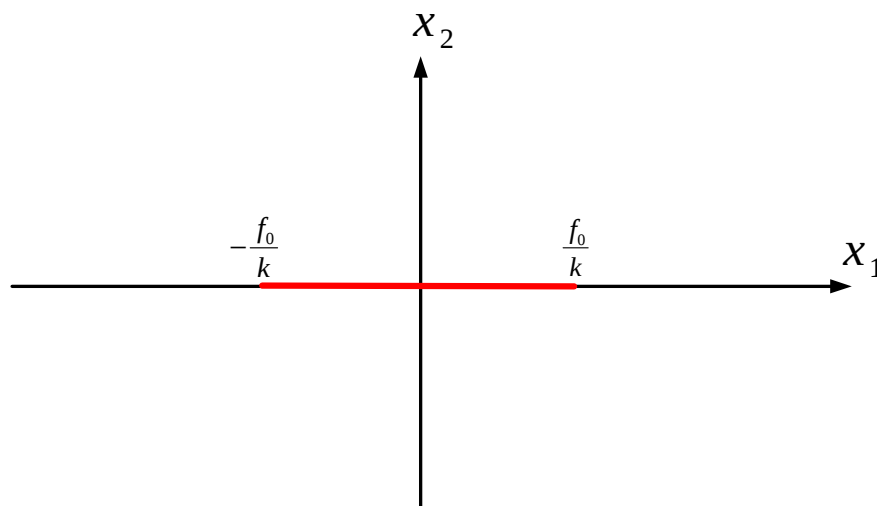
اکنون با استفاده از معادلات بدست آمده تمامی نقاط تعادل را بدست می‌آوریم.

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{F_c(0)}{m}$$

$$x_1 = -\frac{F_c(0)}{k}$$

می دانیم $F_c(0)$ می تواند مقادیری از $-f_0$ تا f_0 را اختیار کند بنابراین نقاط تعادل در صفحه حالت را می توان به صورت زیر نشان داد. لازم به ذکر است که در این سیستم نقاط تعادل ایزوله نمی باشند. این موضوع از لحاظ مفهومی نیز قابل استنباط می باشد به طوری که این اصطکاک ایستایی همواره دارای جهتی در خلاف مسیر حرکت است بنابراین با جابجا کردن جسم ممکن است این اصطکاک ایستایی موجب شود تا برآیند نیروهای وارد بر جسم مانع از حرکت آن شود.



اکنون با استفاده از تشکیل $\frac{dx_2}{dx_1}$ اقدام به یافتن مسیر حالت می کنیم.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k}{m} \left(\frac{x_1}{x_2} \right) - \frac{1}{m} \frac{F_c(x_2)}{x_2}$$

الف) $x_2 > 0$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k}{m} \left(\frac{x_1}{x_2} \right) - \frac{1}{m} \frac{f_0}{x_2}$$

$$x_2 dx_2 = \left(-\frac{k}{m} x_1 - \frac{f_0}{m} \right) dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} + d = -\frac{k}{m} \frac{x_1^2}{2} - \frac{f_0}{m} x_1$$

$$x_2^2 + \frac{k}{m} x_1^2 + \frac{2f_0}{m} x_1 + d = 0$$

$$x_2^2 + \frac{k}{m} \left(x_1^2 + \frac{2f_0}{m} x_1 + \left(\frac{f_0}{m} \right)^2 \right) - \frac{k}{m} \left(\frac{f_0}{m} \right)^2 + d = 0$$

$$x_2^2 + \frac{\left(x_1 + \frac{f_0}{k}\right)^2}{\frac{m}{k}} = -\frac{k}{m} \left(\frac{f_0}{m}\right)^2 + d$$

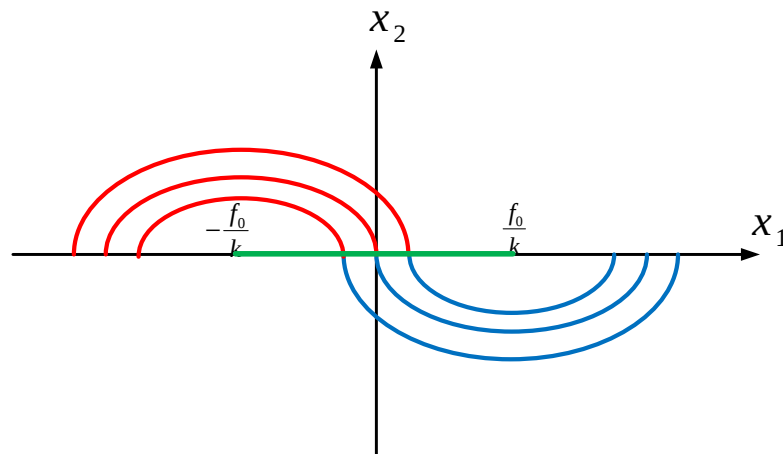
معادلات بالا با در آخر به صورت زیر می شود.

$$y^2 + \frac{(x+c)^2}{a} = b^2, c = \frac{f_0}{k}, a = \frac{m}{k}, b = -\frac{k}{m} \left(\frac{f_0}{m}\right)^2 + d$$

مشاهده می شود مسیر حالت بیضی هایی به مرکز $(-\frac{f_0}{k}, 0)$ می باشد اکنون اگر برای حالت $x_2 < 0$ نیز این معادلات مسیر حالت را بدست آوریم که به صورت زیر خواهد شد.

$$y^2 + \frac{(x+c)^2}{a} = b^2, c = -\frac{f_0}{k}, a = \frac{m}{k}, b = -\frac{k}{m} \left(\frac{f_0}{m}\right)^2 + d$$

می دانیم نمایش معادله $ay^2 + (x+c)^2 = R^2$ بیضی است با شعاع های R و $\frac{R}{\sqrt{a}}$ و مرکز $(-c, 0)$. با این توضیحات درمی یابیم که با تغییر ثابت انتگرال گیری تنها شعاع بیضی تغییر خواهد کرد و نسبت شعاع های آن نیز دستخوش تغییر نخواهد شد. بنابراین می توان این بیضی ها را به صورت زیر ترسیم کرد.



اقدام بعدی برای تکمیل مسیر حالت یافتن جهت های مسیر حالت است برای این کار کافی است در هر ناحیه، با استفاده از معادلات حالت، علامت $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ را مشخص کنیم برای این کار کافی است تنها بار ارائه یک مثال در هر ناحیه این مهم را به انجام برسانیم.

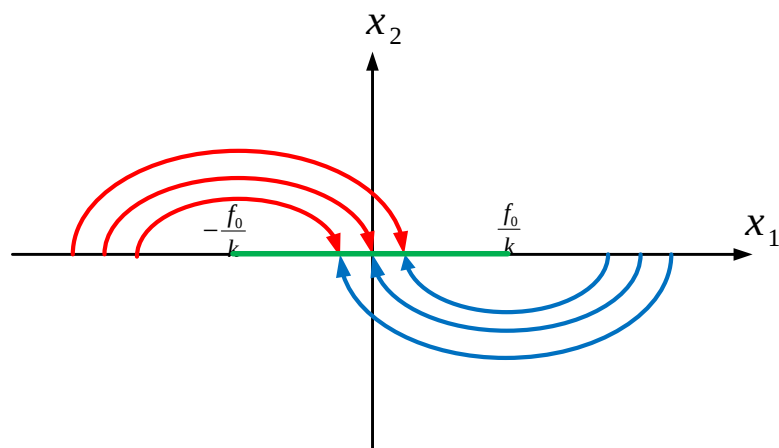
ناحیه اول : برای بررسی در ناحیه اول کافی است تا به عنوان نمونه حالت ها را برابر با $(1,1)$ قرار داده و علامت $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ را مشخص کنیم.

$$\dot{x}_1 = 1 > 0$$

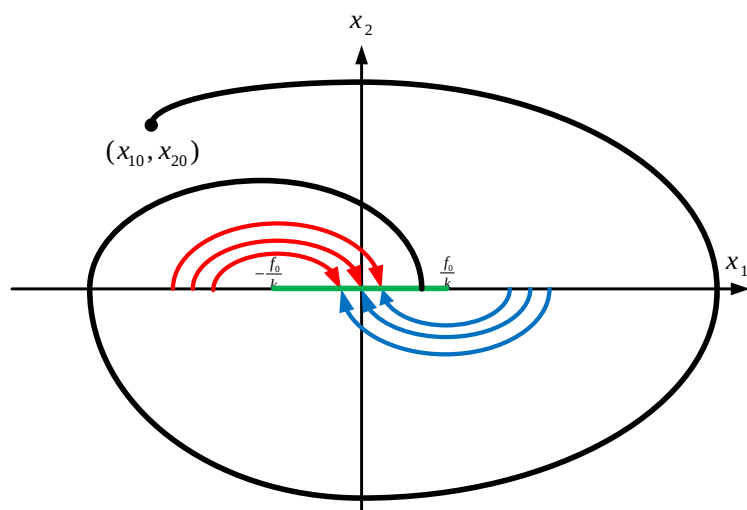
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{f_0}{m} < 0$$

با استفاده از علامت های بدست آمده می توان نتیجه گرفت که مسیر حالت در جهتی است که x_1 ها افزایش یافته و x_2 ها کاهش می یابند.

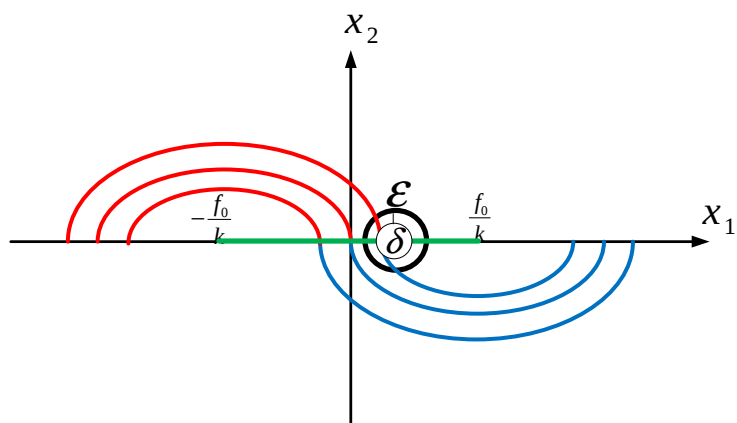
برای مابقی نواحی نیز می توان عملیات فوق را انجام داد و جهت را یافت اکنون اقدام به تکمیل مسیر حالت می کنیم.



برای فهم بیشتر مسیر حالت های رسم شده مثالی را بیان می کنیم. فرض کنید در محل (x_0, y_0) قرار داشته باشیم با شروع از این حالت مشاهده می کنیم که جسم پس از سه بار تغییر در جهت حرکت خود به نقطه تعادل می رسد این موضوع نیز از لحاظ فیزیک نیز واضح است هرچه سرعت اولیه و مکان اولیه از تعادل ها دورتر باشند با نوسانات بیشتری به تعادل می رسند.



در حالت خطی سازی شده قطب ها از نوع موهومی مزدوج است در نتیجه نمی توان درباره پایداری اظهار نظر کرد بنابراین باید از روش دیگری برای بررسی پایداری استفاده کنیم. در این مسئله با رسم مسیر حالت، استفاده از تعریف پایداری کمک بسیار زیادی در بررسی پایداری می کند. هرکدام از تعادل های سیستم را که در نظر بگیریم یک ϵ برای آن در نظر بگیریم حتما می توان برای آن یک δ در نظر گرفت که با شروع حالت در آن محدوده، همواره داخل ϵ بمانیم.



به دلیل اینکه نقاط تعادل ایزوله نمی‌باشند پایداری از نوع مجانبی نمی‌تواند باشد.

پاسخ تمرین شماره ۱۰ (ب):

در این تمرین سعی خواهیم داشت تا با استفاده از روش خطوط هم شیب، مسیر حالت را برای یک سیستم غیر خطی

رسم نماییم.

در ابتدا با در نظر گرفتن چند شیب مختلف اقدام به یافتن منحنی هم شیب برای آنها کرده و آن‌ها را رسم می‌کنیم.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{-x_2^2} = m$$

الف) $m = 1$

$$\frac{x_1}{x_2^2} = 1 \rightarrow x_2^2 = x_1$$

ب) $m = -1$

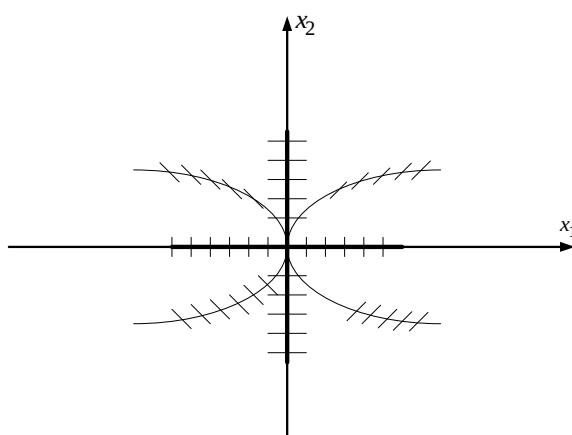
$$\frac{x_1}{x_2^2} = 1 \rightarrow x_2^2 = -x_1$$

ج) $m = 0$

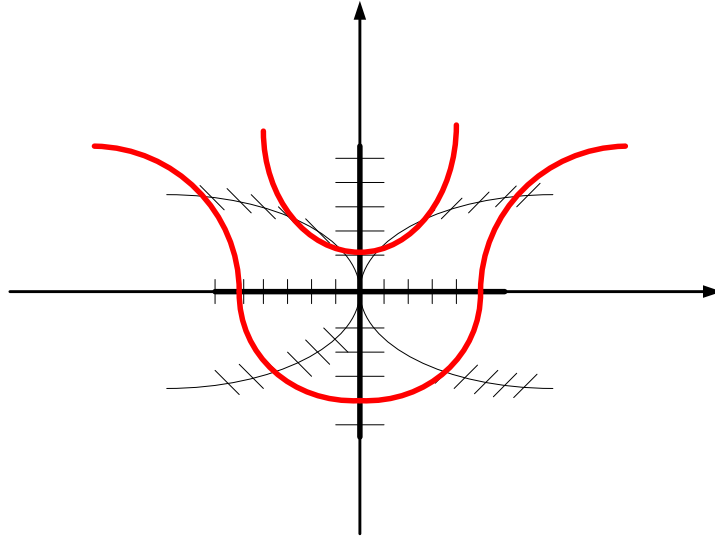
$$\frac{x_1}{x_2^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0$$

د) $m = \infty$

$$x_2 = 0$$



با استفاده از رسم این منحنی‌ها می‌توان به صورت کیفی مسیر حالت را رسم کرد که یکی از این مسیر حالت‌ها به صورت زیر خواهد شد.



پاسخ تمرین شماره ۱۲:

الف) شرط تعادل سیستم‌های گسسته:

$$x[k+1] = x[k]$$

$$x^*[k] : \text{نقاط تعادل}$$

$$x^*[k] = x^*[k] - \frac{f(x^*[k])}{\dot{f}(x^*[k])} \rightarrow \frac{f(x^*[k])}{\dot{f}(x^*[k])} = 0 \xrightarrow{\dot{f}(x^*[k]) \neq 0} f(x^*[k]) = 0$$

ب) خطی سازی در نقطه‌ی تعادل:

$$x[k+1] = x^*[k] + A_k(x[k] - x^*[k])$$

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*[k])$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x[k] - \frac{f(x[k])}{\dot{f}(x[k])} \right) = 1 - \frac{\dot{f}(x[k])\dot{f}(x[k]) - f(x[k])\ddot{f}(x[k])}{\dot{f}^2(x[k])} = 1 - \frac{\dot{f}^2(x[k]) - f(x[k])\ddot{f}(x[k])}{\dot{f}^2(x[k])} \\ &= 1 - 1 + \frac{f(x[k])\ddot{f}(x[k])}{\dot{f}^2(x[k])} = \frac{f(x[k])\ddot{f}(x[k])}{\dot{f}^2(x[k])} \end{aligned}$$

$$A_k = \frac{f(x^*[k])\ddot{f}(x^*[k])}{\dot{f}^2(x^*[k])} \xrightarrow{f(x^*[k])=0} A_k = 0$$

همان طور که مشاهده می‌شود مقدار ویژه‌ی سیستم خطی سازی شده در $z = 0$ قرار داشته که داخل دایره‌ی واحد است لذا سیستم خطی سازی شده پایدار مجانبی است و به تبع آن سیستم غیرخطی حول نقطه‌ی تعادلش پایدار مجانبی است.